

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐẬU THỊ HUẾ

TẬP HỢP ĐỐI XỨNG CỦA
NHÓM CON TRONG VÀNH CHIA
CÓ PHÉP ĐỐI HỢP

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã ngành: 9460104

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

TP. Hồ Chí Minh - 2025

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
ĐHQG-HCM

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TS. Bùi Xuân Hải**

Phản biện 1: **PGS.TS. Phan Thanh Toàn**

Phản biện 2: **PGS.TS. Lê Anh Vũ**

Phản biện 3: **PGS.TS. Phan Hoàng Chơn**

Phản biện độc lập 1: **GS.TS. Nguyễn Sum**

Phản biện độc lập 2: **PGS.TS. Lê Công Trình**

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo
hợp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, vào hồi ... giờ ... ngày
... tháng ... năm 2025.

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

- Thư viện Khoa học Tổng hợp TP. HCM
- Thư viện Đại học Quốc gia TP.HCM
- Thư viện Trường Đại học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

Mục lục

Chương 1. Mở đầu	2
Chương 2. Kiến thức chuẩn bị	5
Chương 3. Các nhóm con nhân trong vành có phép đối hợp . . .	7
Chương 4. Các phần tử đối xứng trong vành chia có phép đối hợp	11
Chương 5. Kết luận	13
Tài liệu tham khảo	15
Danh mục công trình của tác giả	20
Chương 6. Báo cáo Hội nghị	20

CHƯƠNG 1. MỞ ĐẦU

Đối tượng nghiên cứu chính của luận án là các lớp vành được trang bị phép đối hợp. Cụ thể, chúng tôi xem xét tập hợp các phần tử đối xứng thoả tính chất nào đó thì có ảnh hưởng như thế nào đến cấu trúc của vành.

Cho R là một vành có tâm $Z(R)$. Một *phép đối hợp* trên R là một ánh xạ $\star : R \rightarrow R, x \mapsto x^\star$, thoả các điều kiện $(x+y)^\star = x^\star + y^\star, (x^\star)^\star = x$ và $(xy)^\star = y^\star x^\star$ với mọi $x, y \in R$. Nếu $x^\star = x$ với mọi $x \in Z(R)$ thì ta nói $\star$ là phép đối hợp *loại 1*; ngược lại, phép đối hợp $\star$ được gọi là phép đối hợp *loại 2*. Trong toàn bộ luận án, chúng tôi luôn giả sử rằng $\star$ là phép đối hợp loại 1.

Với mỗi phần tử $x \in R$, nếu $x^\star = x$ thì ta nói rằng x là phần tử *đối xứng*. Các phần tử $x + x^\star$ và $xx^\star$ lần lượt được gọi là *vết* và *chuẩn* của x . Rõ ràng, vết và chuẩn của x là các phần tử đối xứng. Nếu $x^\star x = 1 = xx^\star$ thì ta nói x là một phần tử *đơn nhất* (unitary element). Một số tính chất và ứng dụng quan trọng của các phần tử đơn nhất được trình bày chi tiết trong [14] và [41]. Những kết quả cơ bản của vành có phép đối hợp có thể tham khảo trong [25].

Trên cơ sở nghiên cứu tập hợp các phần tử đối xứng trong vành có phép đối hợp, Herstein, Montgomery và Chacron đã nghiên cứu tập hợp các phần tử đối xứng căn trên tâm trong [10, 24, 27, 38]. Trong khi đó, Giambruno và một vài tác giả khác đã nghiên cứu vành mà các phần tử đối xứng của nó thoả một vài điều kiện đại số trong [3, 4, 20]. Cũng liên quan đến chủ đề này, có những nghiên cứu về tác động của

tính đại số của tập hợp các phần tử đối xứng trong một F -đại số R có phép đối hợp (với F là một trường) lên tính đại số của toàn bộ R . Ví dụ, trong [37], Montgomery chứng minh được rằng mọi phần tử của R đều là phần tử đại số trên F khi F là trường vô hạn không đếm được và các phần tử đối xứng của R là đại số trên F . Để minh họa thêm, xin nhắc lại một kết quả trong [29, Theorem 7], khi Jacobson chứng minh được rằng nếu D là một vành chia đại số bậc bị chặn trên tâm F của nó; tức là, nếu tồn tại một số nguyên dương d sao cho $[F(a) : F] < d$ với mọi $a \in D^\times = D \setminus \{0\}$, thì D là vành chia hữu hạn chiều trên tâm. Sau Jacobson, người ta quan tâm đến việc đánh giá số chiều $[D : F]$. Giả sử K là một trường con bất kì của D không nhất thiết nằm trong F . Từ việc nghiên cứu tính đại số một phía của D trên K , một vài tác giả đã đạt được các kết quả giúp đánh giá được số chiều của D trên F . Chẳng hạn, trong [6, Theorem 1.3], các tác giả chỉ ra rằng nếu D là vành chia đại số trái bậc bị chặn bởi d trên K thì $[D : F] \leq d^2$. Gần đây, trong [8, Theorem 4.1], các tác giả đã chứng minh được rằng nếu D là vành chia tâm F , N là một nhóm con chuẩn tắc không nằm trong F và N đại số bậc bị chặn bởi d trên F thì $[D : F] \leq d^2$. Bây giờ, chúng ta giả sử vành chia D có phép đối hợp $\star$. Thật thú vị khi biết điều gì sẽ xảy ra nếu ta thay giả thiết đối với N bởi giả thiết N_+ là đại số trái bậc bị chặn bởi d trên K . Trong [43, Theorem 3], tác giả đã chứng minh được rằng nếu F vô hạn và D_+ đại số phải bậc bị chặn bởi d trên một trường con K của D chứa F thì $[D : F] < 4^d$.

Một câu hỏi tổng quát hơn được đặt ra là nếu một tập con được xác định bởi phép đối hợp trên vành R (chẳng hạn, tập hợp các phần tử đối xứng) thoả tính chất nào đó thì nó ảnh hưởng như thế nào tới cấu trúc vành R ?

Luận án sẽ tập trung trình bày các kết quả liên quan đến câu hỏi này.

Nội dung chính của luận án được chia làm năm chương. Trong Chương 1 chúng tôi trình bày tổng quan hướng nghiên cứu của luận án. Mục đích của chương này là trình bày sơ lược lịch sử nghiên cứu liên quan và phát biểu các kết quả chính của luận án. Chương 2 nêu các khái niệm cơ bản và liệt kê một số kết quả mà chúng tôi sẽ sử dụng trong các chương sau. Mục đích của Chương 2 là tạo điều kiện dễ dàng cho người đọc theo dõi những trích dẫn của chúng tôi về các kết quả đã được các tác giả công bố trong nhiều bài báo hoặc sách chuyên khảo khác nhau. Chương 3 mô tả cấu trúc của các lớp vành có phép đối hợp khi vết và chuẩn của nhóm con chuẩn tắc thoả một số điều kiện. Ở Chương 4, luận án trình bày các vấn đề liên quan đến các *điều kiện giao hoán*, *điều kiện Engel*, *điều kiện Engel địa phương*, *điều kiện giao hoán lũy thừa*, *điều kiện giao hoán lũy thừa địa phương*, *symplectic*, *vô hướng* và mối quan hệ giữa chúng trong các lớp vành. Đặc biệt, trong chương này, chúng tôi mô tả cấu trúc của vành chia khi nó được trang bị một phép đối hợp symplectic.

Phần Kết luận của luận án nêu tóm tắt các kết quả mà luận án đã thu được và đề xuất một số hướng nghiên cứu tiếp theo.

Để tiện theo dõi và đối chiếu với luận án, trong quyển tóm tắt này, chúng tôi đánh số các phát biểu (Định nghĩa, Mệnh đề, Bổ đề, Định lý, Nhận xét, Hệ quả) giống như trong luận án.

CHƯƠNG 2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chúng tôi trình bày các khái niệm liên quan đến các điều kiện giao hoán, điều kiện Engel, điều kiện Engel địa phương, điều kiện giao hoán lũy thừa, điều kiện giao hoán lũy thừa địa phương, symplectic, vô hướng và mối quan hệ giữa chúng trong các lớp vành có phép đối hợp. Trong các định nghĩa dưới đây, R được giả thiết là vành có phép đối hợp $\star$ và $Z(R)$ là tâm của R .

Định nghĩa 2.3.1. *Ta nói $\star$ thỏa điều kiện giao hoán (commuting condition), mà ta kí hiệu là Điều kiện (C1), nếu $x^\star x = x x^\star$ với mọi $x \in R$.*

Với N là số tự nhiên, ta định nghĩa bằng quy nạp phần tử $[x^\star, x]_N$ như sau:

$$[x^\star, x]_1 := [x^\star, x] = x^\star x - x x^\star; [x^\star, x]_N = [x^\star, x, \dots, x] = [[x^\star, x]_{N-1}, x].$$

Định nghĩa 2.3.2. *Ta nói $\star$ thỏa điều kiện Engel địa phương (local Engel condition), mà ta kí hiệu là Điều kiện (C2), nếu với mỗi $x \in R$, tồn tại một số nguyên dương N phụ thuộc vào x sao cho $[x^\star, x]_N = 0$.*

Định nghĩa 2.3.3. *Phép đối hợp $\star$ được gọi là thỏa điều kiện giao hoán lũy thừa địa phương (locally power commuting condition), mà ta kí hiệu là Điều kiện (C3), nếu mỗi $x \in R$, tồn tại một số nguyên dương N phụ thuộc vào x sao cho $[x^\star, x^N] = 0$.*

Định nghĩa 2.3.4. *Phép đối hợp $\star$ được gọi là phép đối hợp symplectic nếu nó thỏa Điều kiện (C4): $x + x^\star \in Z(R)$ với mọi $x \in R$.*

Nhận xét 2.3.5. *Cho F là một trường và $R = M_2(F)$. Ánh xạ $\star : R \rightarrow$*

R cho bởi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ là một phép đối hợp. Rõ ràng, phép đối hợp này là một phép đối hợp symplectic. Phép đối hợp này còn được gọi là phép đối hợp symplectic thông thường (ordinary symplectic).

Định nghĩa 2.3.6. Phép đối hợp $\star$ được gọi là phép đối hợp vô hướng (scalar) nếu nó thỏa Điều kiện (C5): $xx^* \in Z(R)$ với mọi $x \in R$.

Mối quan hệ giữa các điều kiện trên được thể hiện như sau:

$$(C5) \Rightarrow (C4) \Rightarrow (C1) \Rightarrow (C2) \text{ và } (C3).$$

Câu hỏi đặt ra là trong trường hợp nào thì các điều kiện trên tương đương? Trong một chuỗi các bài báo của mình, Chacron đã nghiên cứu về vấn đề này. Cụ thể, chúng tôi nhắc lại một số kết quả dưới đây.

Định lý 2.3.7 ([11, Theorem 2.3]). Nếu A là một vành nửa nguyên tố và có phép đối hợp $\star$ thì các điều kiện (C1), (C4), (C5) là tương đương.

Định lý 2.3.8 ([12, Theorem 4.7]). Nếu A là một vành nửa nguyên tố và có phép đối hợp $\star$ thỏa một đồng nhất thức đa thức thì các điều kiện (C1), (C2) và (C3) là tương đương.

CHƯƠNG 3. CÁC NHÓM CON NHÂN TRONG VÀNH CÓ PHÉP ĐỐI HỢP

Trong chương này, chúng tôi có một số kết quả đầu tiên liên quan đến mở rộng của Định lý phân chia (dichotomy theorem) trong vành chia.

Bổ đề dưới đây mở rộng một kết quả của Herstein trong [26].

Bổ đề 3.1.1. *Cho D là một vành chia có phép đối hợp $\star$ và G là một nhóm con á chuẩn tắc không nằm trong tâm của $D^\times$. Giả sử A là một vành chia con của D và H là một tập con không nằm trong tâm của $D^\times$ thỏa một trong các điều kiện sau:*

- (1) $xHx^{-1} \subseteq H$ với mọi $x \in G$.
- (2) $xHx^\star \subseteq H$ với mọi $x \in G$ và $1 \in H$.

Khi đó, nếu A là H -bất biến thì $A \subseteq Z(D)$ hoặc $A = D$.

Áp dụng Bổ đề 3.1.1, ta thu được kết quả dưới đây:

Định lý 3.1.2. *Cho D là một vành chia có phép đối hợp $\star$ và A là một vành chia con của D . Giả sử G là một nhóm con á chuẩn tắc không nằm trong tâm của D và G là $\star$ -bất biến. Khi đó:*

- (1) Nếu N_G không nằm trong tâm và A là N_G -bất biến thì $A \subseteq Z(D)$ hoặc $A = D$.
- (2) Nếu G_+ không nằm trong tâm và A là G_+ -bất biến thì $A \subseteq Z(D)$ hoặc $A = D$.

Hệ quả 3.1.3. Cho D là một vành chia có phép đối hợp $\star$. Giả sử G là một nhóm con á chuẩn tắc không nằm trong tâm của D và G là $\star$ -bất biến. Khi đó:

- (1) Nếu N_G giao hoán thì $N_G \subseteq Z(D)$.
- (2) Nếu N_G không giao hoán thì D là vành chia sinh bởi N_G .

Từ Định lý 3.1.2, ta có một mở rộng cho kết quả trong [25, Lemma 6.4.1] đối với trường hợp R là vành chia.

Mệnh đề 3.1.4. Cho D là một vành chia có phép đối hợp $\star$. Giả sử G là một nhóm con á chuẩn tắc của $D^\times$ sao cho N_G không nằm trong tâm của D và G là $\star$ -bất biến. Nếu A là một vành chia con của D sao cho $xAx^\star \subseteq A$ với mọi $x \in G$ thì $A = D$.

Lưu ý rằng kết quả này không còn đúng nếu thay “vành chia con” bởi “vành con”. Tuy nhiên, kết quả sẽ đúng trong trường hợp D là một vành chia đại số trên tâm.

Hệ quả 3.1.5. Cho D là một vành chia có phép đối hợp $\star$. Giả sử G là một nhóm con á chuẩn tắc của $D^\times$ sao cho N_G không nằm trong tâm của D và G là $\star$ -bất biến. Nếu D đại số trên tâm và A là một vành con của D thực sự chứa $Z(D)$ sao cho $xAx^\star \subseteq A$ với mọi $x \in G$ thì $A = D$.

Để minh họa cho việc kết quả trên không còn đúng nếu thay “vành chia con” bởi “vành con”, chúng tôi xây dựng D dựa trên cấu trúc vành chia Mal'cev-Neumann.

Định lý 3.1.9. Vành chia Mal'cev-Neumann $K((H))$ của nhóm Heisenberg H trên vành chia K là

$$K((H)) = \left\{ \sum_{k \geq u, m \geq v, n \geq w} a_{k,m,n} \lambda^k y^m x^n \mid a_{k,m,n} \in K, u, v, w \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng một phép đối hợp trên $K((H))$ và một vành con A của $K((H))$ như sau:

Với mọi $\sum_{k \geq u, m \geq v, n \geq w} a_{k,m,n} \lambda^k y^m x^n \in K((H))$, trong đó $u, v, w \in \mathbb{Z}$, ta định nghĩa:

$$\left(\sum_{k \geq u, m \geq v, n \geq w} a_{k,m,n} \lambda^k y^m x^n \right)^* = \sum_{k \geq u, n \geq w, m \geq v} a_{k,m,n} \lambda^k y^n x^m.$$

Dễ dàng kiểm tra $\star$ là một phép đối hợp trên $K((H))$.

Đặt

$$A = \left\{ \sum_{k \geq u, m \geq 0, n \geq 0} a_{k,m,n} \lambda^k y^m x^n \in K((H)) \mid a_{k,m,n} \in K \text{ và } u \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ta có kết quả sau đây:

Mệnh đề 3.1.10. *Cho tập hợp A được định nghĩa như trên. Khi đó,*

- (1) *A là vành con thực sự và $\star$ -bất biến của $K((H))$.*
- (2) *Nhóm nhân $A^\times$ của A là nhóm con chuẩn tắc không giao hoán, $\star$ -bất biến của $K((H))^\times$.*

Rõ ràng, vành con A trong Mệnh đề 3.1.10 là một phản ví dụ cho Hệ quả 3.1.5 nếu D không phải là vành chia đại số trên tâm.

Tiếp theo, với $\text{char}(D) \neq 2$ chúng tôi chứng minh kết quả tương tự Hệ quả 3.1.3 cho các tập T_G và N_G , trong đó G là một nhóm con chuẩn tắc của $D^\times$ mà không cần thiết G là $\star$ -bất biến. Hơn nữa, ta có thể chỉ ra rằng $[D : F] \leq 4$.

Định lý 3.3.3. *Cho D là một vành chia tâm F và có phép đối hợp $\star$. Giả sử tâm F vô hạn, $\text{char}(D) \neq 2$ và G là một nhóm con chuẩn tắc không nằm trong tâm của D . Nếu S là tập T_G hoặc N_G và S giao hoán thì $S \subseteq F$ và $[D : F] = 4$. Hơn nữa, $\star$ là phép đối hợp loại symplectic.*

Trong trường hợp D là vành chia đặc trưng 2, để nhận được kết quả tương tự, ta cần giả sử rằng hợp của tập $N_G \cup T_G$ giao hoán.

Định lý 3.3.5. *Cho D là một vành chia tâm F và có phép đối hợp $\star$. Giả sử G là một nhóm con chuẩn tắc không nằm trong tâm của D và $S = T_G \cup N_G$. Nếu S giao hoán thì $[D : F] = 4$ và $\star$ là phép đối hợp loại symplectic.*

Cuối cùng, chúng tôi nghiên cứu vấn đề tương tự như mục trước nhưng đối với lớp vành artin và lớp vành nửa nguyên thủy.

Định lý 3.4.1. *Cho R là một vành đơn artin tâm F và có phép đối hợp $\star$. Giả sử G là một nhóm con chuẩn tắc không nằm trong F và $S = T_G \cup N_G$. Nếu S nằm trong F thì R là vành chia chỉ số 2 hoặc R đẳng cấu với vành ma trận $M_2(F)$ và $\star$ là phép đối hợp loại symplectic.*

Định lý 3.4.4. *Cho F là một trường và R là một F -đại số. Giả sử $\star$ là một phép đối hợp trên R và tập hợp các vết và chuẩn của $R^\times$ nằm trong F . Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

- (1) *Nếu R là một vành nửa nguyên thủy và đại số trên F thì R là tích trực tiếp con của các vành chia chỉ số 2 và đại số ma trận cấp ≤ 2 .*
- (2) *Nếu R là một vành artin thì R là tích trực tiếp hữu hạn của các vành chia chỉ số 2 và đại số ma trận cấp ≤ 2 trên trường.*

CHƯƠNG 4. CÁC PHẦN TỬ ĐỐI XỨNG TRONG VÀNH CHIA CÓ PHÉP ĐỐI HỢP

Trong chương này chúng ta sẽ khảo sát cấu trúc của D dưới tác động của những điều kiện được áp đặt lên một tập con nào đó trong tập hợp tất cả các phần tử đối xứng của D .

Ta biết rằng nếu B là một vành con của vành A với phép đối hợp $\star$ thì hạn chế của $\star$ lên B không nhất thiết là một phép đối hợp trên B . Ở đây, chúng tôi sẽ đưa ra một số điều kiện để hạn chế của phép đối hợp lên một vành con cũng là một phép đối hợp trên vành con đó.

Bổ đề 4.1.6. *Cho A là một vành tâm Z , có phép đối hợp $\star$ và G là một nhóm con của $A^\times$. Giả sử $Z[G]$ là vành con của A được sinh ra bởi G trên Z . Nếu $T_G \subseteq Z$ thì hạn chế của $\star$ trên $Z[G]$ là một phép đối hợp symplectic trên $Z[G]$.*

Định lý sau đây đưa ra một số điều kiện tương đương đối với một vành chia D với phép đối hợp. Đây cũng là kết quả chính trong chương này.

Định lý 4.2.8. *Cho D là một vành chia tâm F và có phép đối hợp $\star$. Nếu G là một nhóm con á chuẩn tắc không nằm trong tâm của $D^\times$ thì các điều kiện dưới đây là tương đương:*

(1) $T_G \subseteq F$.

(2) $T_D \subseteq F$.

(3) $N_D \subseteq F$.

$$(4) \ N_G \subseteq F.$$

Hơn nữa, nếu một trong các điều kiện trên thỏa thì D là một vành chia quaternion trên F , nghĩa là $[D : F] = 4$.

CHƯƠNG 5. KẾT LUẬN

Trong luận án này, chúng tôi đã thực hiện một số nghiên cứu liên quan đến tập hợp các phần tử đối xứng của nhóm con trong vành chia có phép đối hợp. Các kết quả chính của luận án đã kế thừa và phát triển một số vấn đề đã được nghiên cứu trước đó, đồng thời mô tả cấu trúc của một số lớp vành khi một tập con của tập các phần tử đối xứng thỏa tính chất nào đó. Cụ thể:

1. Định lý 3.1.2 mở rộng kết quả [26, Theorem] của Herstein, trong đó tập hợp $D_+^\times$ được thay thế bằng tập hợp G_+ .

2. Định lý 3.3.3 đã mô tả cấu trúc của vành chia D khi một tập con được xác định bởi phép đối hợp trên vành chia thỏa tính chất nào đó. Cụ thể, cho D là một vành chia tâm F và có phép đối hợp $\star$. Giả sử tâm F vô hạn, $\text{char}(D) \neq 2$ và G là một nhóm con chuẩn tắc không nằm trong tâm của $D^\times$. Nếu S là tập T_G hoặc N_G và S giao hoán thì $S \subseteq F$ và $[D : F] = 4$. Hơn nữa, khi đó phép đối hợp $\star$ là phép đối hợp loại symplectic.

3. Định lý 3.3.5 là kết quả tổng quát của Định lý 3.3.3 trong trường hợp D là vành có đặc trưng bất kì.

4. Định lý 3.4.1 đã mô tả cấu trúc của vành đơn artin có phép đối hợp khi một tập con được xác định bởi phép đối hợp trên vành đơn artin thỏa một tính chất nào đó. Cụ thể, cho R là một vành đơn artin tâm F và có phép đối hợp $\star$. Giả sử G là một nhóm con chuẩn tắc không nằm trong tâm của $R^\times$ và $S = T_G \cup N_G$. Nếu $S \subseteq F$ thì R là vành chia chỉ số 2 hoặc R đẳng cấu với vành ma trận $M_2(F)$ và $\star$ là

phép đối hợp symplectic thông thường.

5. Định lý 3.4.4 đã mô tả cấu trúc của vành nửa nguyên thủy và cấu trúc của vành artin có phép đối hợp khi một tập con được xác định bởi phép đối hợp trên nó thỏa một tính chất nào đó.

6. Định lý 4.2.8 là một kết quả khá mạnh, mở rộng một số kết quả trước đó trong trường hợp vành chia có phép đối hợp. Cho D là vành chia tâm F có phép đối hợp. Năm 2016, Chacron [11] đã chứng minh các điều kiện tương đương sau:

$$T_D \subseteq F \Leftrightarrow N_D \subseteq F.$$

Định lý 4.2.8 khi xét G là nhóm con á chuẩn tắc bất kỳ không nằm trong tâm của $D^\times$ đã bổ sung thêm những điều kiện rất mạnh. Cụ thể như sau:

$$T_G \subseteq F \Leftrightarrow T_D \subseteq F \Leftrightarrow N_D \subseteq F \Leftrightarrow N_G \subseteq F.$$

Định lý 4.2.8 cũng là một mở rộng rất mạnh kết quả của Định lý 3.3.5 trong luận án này đối với trường hợp vành chia. Trong khi Định lý 3.3.5 yêu cầu điều kiện $T_G \cup N_G \subseteq F$, thì để nhận được cùng kết quả, Định lý 4.2.8 chỉ yêu cầu $T_G \subseteq F$ hoặc $N_G \subseteq F$ là đủ.

Hướng nghiên cứu tiếp theo chúng ta có thể nghĩ tới là nghiên cứu về sự ảnh hưởng của tập con được xác định bởi phép đối hợp trên vành (chẳng hạn như tập hợp các phần tử đơn nhất, ...) tới cấu trúc của vành. Ngoài ra, ta cũng có thể mở rộng hướng nghiên cứu đối với phép đối hợp loại 2, đồng thời nghiên cứu về phép đối hợp trên các lớp vành khác.

- [1] M. Aaghabali and M. H. Bien, Subnormal subgroups and self-invariant maximal subfields in division rings, *J. Algebra*, **586** (2021), 844–856.
- [2] S. A. Amitsur, On rings with identities, *J. London Math. Soc.* **30** (1955), 464–470.
- [3] Z. Balogh, L. Creedon, J. Gildea, Involutions and unitary subgroups in group algebras, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **79** (2013), no. 3–4, 391–400.
- [4] Z. Balogh, Lie derived length and involutions in group algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), no.6, 1282–1287.
- [5] K.I. Beidar, W.S. Martindale and A.V. Mikhalev, *Rings with Generalized Identities*, Marcel Dekker, Inc., (New York-Basel-Hong Kong, 1996).
- [6] J. B. Bell, V. Drensky, Y. Sharifi, Shirshov’s theorem and division rings that are left algebraic over a subfield, *J. Pure Appl. Algebra* **217** (2013) 1605–1610.
- [7] M. H. Bien, B. X. Hai, D. T. Hue, On the unit groups of rings with involution, *Acta Math. Hungar.* **166** (2) (2022), 432–452.
- [8] M. H. Bien, B. X. Hai and V. M. Trang, Algebraic commutators with respect to subnormal subgroups in division rings, *Acta Math. Hungar.* **163** (2) (2021), 663–681.

- [9] M. H. Bien, M. Ramezan-Nassab and D. H. Viet, $\star$ -Group identities on the units of division rings, *Comm. Algebra* **49** (7) (2021), 3010–3019.
- [10] M. Chacron and I. N. Herstein, Powers of skew and symmetric elements in division rings, *Houston J. Math.* **1** (1975), no. 1, 15–27.
- [11] M. Chacron, Commuting involution, *Comm. Algebra* **44** (9) (2016), 3951–3965.
- [12] M. Chacron, Involution satisfying a local Engel or power commuting condition, *Comm. Algebra* **45** (5) (2017), 2018–2028.
- [13] K. Chiba, Generalized rational identities of subnormal subgroups of skew fields, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124**(6) (1996), 1649–1653.
- [14] C. L. Chuang and P. H. Lee, Unitary elements in simple artinian rings, *J. Algebra* **176** (1995) 449–459.
- [15] T. T. Deo, M. H. Bien, B. X. Hai, On weakly locally finite division rings, *Acta Math. Vietnam.* **44** (2) (2019), 553–569.
- [16] P. C. Desmarais and W. S. Martindale 3-rd, Generalized rational identities and rings with involution, *Israel J. Math.* **36** (1980), 187–192.
- [17] M. A. Dokuchaev and J. Z. Goncalves, Identities on Units of Algebraic Algebras, *J. Algebra* **250** (2002), 638–646.
- [18] P. Draxl, *Skew Fields*, London Math. Soc., Lecture Note Series, Vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

- [19] V. O. Ferreira and J. Z. Gonçalves, Free symmetric and unitary pairs in division rings infinite-dimensional over their centers, *Israel J. Math.* **210** (2015), 297–321.
- [20] A. Giambruno, Algebraic conditions on rings with involution, *J. Algebra* **50** (1978), 190–212.
- [21] B. X. Hai, N. K. Ngoc, A note on the existence of non-cyclic free subgroups in division rings, *Arch. Math.* **101** (2013), 437–443.
- [22] B. X. Hai, N. V. Thin, On locally nilpotent subgroups of $GL_1(D)$, *Commun. Algebra* **37** (2009), 712–718.
- [23] I. N. Herstein, A unitary version of the Brauer-Cartan-Hua Theorem, *J. Algebra* **32** (1974), 554–560.
- [24] I. N. Herstein, Rings with periodic symmetric or skew elements, *J. Algebra* **30** (1974), 144–154.
- [25] I. N. Herstein, *Ring with involution*, The University of Chicago Press, (Chicago and London, 1976).
- [26] I. N. Herstein, A remark on division rings with involution, *Indian J. Pure Appl. Math.* **9** (1978), 267–269.
- [27] I. N. Herstein and S. Montgomery, A note on division rings with involutions, *Michigan Math. J.* **18** (1971), 75–79.
- [28] D. T. Hue, A note on division rings with involutions, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **58** (2025).
- [29] N. Jacobson, Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, *Ann. of Math.* **46** (1945), 695–707.

- [30] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 575–580.
- [31] M. A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost and J. P. Tignol, *The book of involutions*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **44** (AMS, Providence, RI, 1998).
- [32] A. G. Kurosh, Problems in ring theory which are related to the Burnside problem for periodic groups, *Izv. Akad. Nauk SSSR* **5**(3) (1941) 233–240.
- [33] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Math. vol. 131, Springer-Verlag (Berlin, 1991).
- [34] C. H. Liu, Some properties on rings with units satisfying a group identity, *J. Algebra* **232** (2000), 226–235.
- [35] C. H. Liu, D. S. Passman, Group algebras with units satisfying a group identity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 337–341.
- [36] J. C. McConnell, A. R. Wadsworth, Locally PI but not PI Division Rings of Arbitrary GK-Dimension, arXiv:1803.09423.
- [37] S. Montgomery, Algebraic algebra with involution, *Proc. Amer. Math. Soc.* **31** (1972), 368–372.
- [38] S. Montgomery, A generalization of a theorem of Jacobson, *Proc. Amer. Math. Soc.* **28** (1971), 366–370.
- [39] N. K. Ngoc, M. H. Bien, B. X. Hai, Free subgroups in almost subnormal subgroups of general skew linear groups, *Algebra i Analiz* **28**(5) (2016), 220–235.

- [40] J. D. Rosen, Generalized Rational Identities and Rings with Involution, *J. Algebra* **89** (1984), 416–436.
- [41] J.P. Serre, Bases normales autoduales et groupes unitaires en caractéristique 2, *Transform. Groups* **19** (2) (2014), 643–698.
- [42] C. J. Stuth, A generalization of the Cartan-Brauer-Hua Theorem, *Proc. Am. Math. Soc.* **15** (1964), 211–217.
- [43] V. H. M. Thu, A note on symmetric elements of a division ring with involution, *Acta Math. Vietnam* (2022), 495–502.
- [44] J.P. Tignol, *Central simple algebras, involutions and quadratic forms*, Lectures at the National Taiwan University (1993).

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

- [I] D. T. Hue, A note on division rings with involutions, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **58** (2025).
- [II] M. H. Bien, B. X. Hai & D. T. Hue, On the unit groups of rings with involution, *Acta Math. Hungar.* **166** (2022), 432–452, DOI: 10.1007/s10474-022-01223-4.

BÁO CÁO HỘI NGHỊ

Một số kết quả chính trong luận án được báo cáo tại các hội nghị:

- [I] Báo cáo *Trace, skew traces and norms of normal subgroup in rings with involution* tại Hội nghị Khoa học lần thứ 12 Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM, 18-19/12/2020.
- [II] Báo cáo *Vết và chuẩn của nhóm con chuẩn tắc trong vành chia có phép đối hợp* tại Hội nghị Toán học Toàn quốc lần thứ IX, Nha Trang, 14-18/8/2018.